UNITA'   4

Proporzioni e loro proprietà

1 Dati quattro numeri non nulli a, b, c, d si dice che essi formano una **proporzione** (o che sono in proporzione) se il rapporto tra i primi due è uguale al rapporto tra gli altri due. In tal caso si scrive:

$$a : b = c : d$$

e si legge «a sta a b come c sta a d».
Per esempio i numeri 4, 12, 27, 81, presi in questo ordine, sono in proporzione; infatti sia il rapporto tra i primi due che il rapporto tra gli altri due è 1/3. Scriviamo quindi:

$$4 : 12 = 27 : 81.$$

a) Scrivere una proporzione diversa dalla precedente.
b) Stabilire se le seguenti quaterne di numeri, presi nell'ordine scritto, sono in proporzione:

100, 10, 20, 2;	1, 12, 2, 24;	2, 8, 4, 32;
$\frac{1}{2}$, 2, 2, 8;	8, 16, 16, 32;	0,6, 1, 9, 15;
5, 10, 10, 50;	3, $\frac{1}{3}$, 1, 9;	5, $\frac{1}{5}$, 25, 1.

2 I quattro numeri a, b, c, d che costituiscono una proporzione, opportunamente raggruppati a due a due, assumono nomi particolari. Tali nomi sono riportati nei due schemi che seguono.

antecedenti
$a : b = c : d$
conseguenti

medi
$a : b = c : d$
estremi

a) Scrivere una proporzione i cui antecedenti siano 2 e 10.
b) Scrivere una proporzione i cui medi siano $\frac{1}{2}$ e 4.

3 Una proporzione si dice **continua** se ha i medi (o gli estremi) tra loro uguali. Per esempio, la proporzione:

$$9 : 6 = 6 : 4$$

è continua (il numero 6 viene detto **medio proporzionale** tra 9 e 4).

a) Scrivere una proporzione continua i cui medi siano entrambi uguali a 12.
b) Scrivere la proporzione continua i cui estremi siano uguali a 4 e a 16.

4 Per le proporzioni valgono alcune proprietà che qui di seguito riportiamo.

— **Proprietà fondamentale.** *In ogni proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.*
— **Proprietà dell'invertire.** *Data una proporzione se ne ottiene un'altra scambiando tra loro ogni antecedente con il proprio conseguente.*
— **Proprietà del permutare.** *Data una proporzione se ne ottiene un'altra scambiando tra loro o i medi o gli estremi.*
— **Proprietà del comporre e dello scomporre.** *In ogni proporzione la somma (o la differenza) degli antecedenti sta alla somma (o alla differenza) dei conseguenti come ogni antecedente sta al proprio conseguente.*

Per esempio, data la proporzione $16 : 24 = 6 : 9$, applicando ad essa tutte le proprietà, nell'ordine secondo il quale sono state enunciate, si ha:

$24 \cdot 6 = 16 \cdot 9$ (vero); $24 : 16 = 9 : 6$ (vero);
$16 : 6 = 24 : 9$ (vero); $9 : 24 = 6 : 16$ (vero);
$(16 + 6) : (24 + 9) = 16 : 24$ (vero); $(16 - 6) : (24 - 9) = 16 : 24$ (vero).

Applicare anche alle due proporzioni:

$$40 : 15 = 32 : 12 \quad \text{e} \quad 12 : 6 = 6 : 3$$

le suddette proprietà.

5 Le proprietà enunciate nel precedente esercizio permettono di ricavare il valore di termini incogniti che compaiono in una proporzione. In particolare, dalla proprietà fondamentale si traggono le seguenti regole:

— *in una proporzione qualunque, un* **medio incognito** *è uguale al rapporto tra il prodotto degli estremi ed il medio noto; analogamente, un* **estremo incognito** *è uguale al rapporto tra il prodotto dei medi e l'estremo noto;*
— *in una proporzione continua, il* **medio proporzionale incognito** *è uguale alla radice quadrata del prodotto degli estremi.*

Per esempio, date le tre proporzioni (nelle quali x rappresenti un termine incognito):

$$5 : x = 10 : 6; \qquad x : 3 = \frac{1}{2} : \frac{3}{7}; \qquad 18 : x = x : 8$$

applicando ad esse le dette regole si ottiene:

— per la prima $x = \dfrac{5 \cdot 6}{10} = 3;$

— per la seconda $x = \dfrac{3 \cdot 1/2}{3/7} = \dfrac{7}{2};$

— per la terza $x = \sqrt{18 \cdot 8} = \sqrt{144} = 12.$

Seguendo gli esempi, date le seguenti proporzioni determinare il valore di x:

a) $8 : 5 = 3 : x; \quad 9 : x = 27 : 2.$ $\left[\dfrac{15}{8}; \dfrac{2}{3}\right]$

b) $x : 3 = 6 : 9; \quad 25 : 3 = x : 9.$ [2; 75]

c) $\dfrac{1}{2} : \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{5} : x; \quad \dfrac{4}{3} : x = \dfrac{5}{4} : 5.$ $\left[\dfrac{4}{15}; \dfrac{16}{3}\right]$

d) $27 : x = x : 363; \quad 0{,}25 : x = x : 0{,}36.$ [99; 0,…

e) $x : \left(2 - \dfrac{3}{2}\right) = \left(5 - \dfrac{1}{5}\right) : \dfrac{9}{2}.$ $\left[\dfrac{8}{15}\right]$

f) $x : \left(5 - \dfrac{7}{8}\right) = \left(9 + \dfrac{4}{3}\right) : \left(8 + \dfrac{2}{8}\right).$ $\left[\dfrac{31}{6}\right]$

g) $\dfrac{2 - \dfrac{3}{2}}{\dfrac{5}{4}} : \dfrac{\dfrac{1}{4}}{\dfrac{1}{3} + 0{,}5} = \dfrac{\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{6}}{2 - \dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{1}{3}} : x.$ $\left[\dfrac{12}{19}\right]$

h) $\left[2\left(1 + \dfrac{1}{3}\right)\right] : x = x : \left(1 - \dfrac{5}{2^5}\right).$ $\left[\dfrac{3}{2}\right]$

6 Date le seguenti proporzioni continue, determinare il valore del medio proporzionale x:

a) per difetto a meno di 0,1:

$$\left[\left(\frac{3}{2} + \frac{21}{10}\right) : \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\right)\right] : x = x : \left\{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 : \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] \cdot 3\right\}$$ [7.

b) per eccesso a meno di 0,01:

$$\left[\left(2+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right)\right] : x = x : \left[\left(4-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(4+\frac{3}{2}\right)\right] \qquad [7{,}19]$$

c) arrotondato a meno di 0,1:

$$\left(\frac{55}{6}+\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{8}\right)^2 : x = x : \left(\frac{7}{8}-\frac{3}{4}:6\right) \qquad [8{,}7]$$

7 Trovare:

a) il **quarto proporzionale** dopo le seguenti terne di numeri:

$$3,\ 15,\ 18; \qquad 2,\ \frac{1}{2},\ 16; \qquad 3,\ 1,\ 27; \qquad [90;\ 4;\ 9]$$

b) il medio proporzionale tra le seguenti coppie di numeri:

$$8 \text{ e } 2; \qquad 5 \text{ e } 125; \qquad 4 \text{ e } 9; \qquad 144 \text{ e } \frac{9}{4}; \qquad \frac{4}{9} \text{ e } \frac{121}{4}; \qquad \frac{1}{49} \text{ e } 9.$$

$$\left[4;\ 25;\ 6;\ 18;\ \frac{11}{3};\ \frac{3}{7}\right]$$

8 L'applicazione successiva di due o più delle proprietà enunciate nell'esercizio N. 4, permette di determinare il valore incognito x che appare nei seguenti tipi di proporzioni:

$$(3+x) : 8 = x : 2; \quad (8-x) : 9 = x : 5; \quad (2-x) : x = 5 : 3.$$

Dalla prima, applicando la legge dello scomporre, si ottiene:

$$(3+x-x) : (8-2) = x : 2, \quad 3 : 6 = x : 2 \quad \text{e quindi} \quad x = \frac{3\cdot 2}{6} = 1.$$

Dalla seconda, applicando la legge del comporre, si ottiene:

$$(8-x+x) : (9+5) = x : 5, \quad 8 : 14 = x : 5 \quad \text{e quindi} \quad x = \frac{8\cdot 5}{14} = \frac{20}{7}.$$

Infine, dalla terza, applicando dapprima la proprietà del permutare i medi e poi la legge del comporre, si ottiene:

$$(2-x) : 5 = x : 3, \quad (2-x+x) : (5+3) = x : 3, \quad x = \frac{2\cdot 3}{8} = \frac{3}{4}.$$

Seguendo gli esempi, trovare il valore della x che compare nelle proporzioni qui riportate:

a) $(x+4) : x = 8 : 3;$ $\qquad (x+2) : x = 5 : 4.$ $\qquad \left[\frac{12}{5};\ 8\right]$

b) $\left(x+\frac{1}{2}\right) : 3 = x : 2;$ $\qquad \left(x+\frac{2}{5}\right) : \frac{1}{2} = x : \left(1-\frac{2}{3}\right).$ $\qquad \left[1;\ \frac{4}{5}\right]$

c) $(5-x) : x = 7 : 2;$ $\qquad \left(\frac{1}{2}-x\right) : x = \frac{4}{5} : \frac{2}{5}.$ $\qquad \left[\frac{10}{9};\ \frac{1}{5}\right]$

d) $\left(\frac{5}{2}-x\right) : 3 = x : \left(1-\frac{1}{2}\right);$ $\qquad x : 3 = (x-7) : 1.$ $\qquad \left[\frac{5}{14};\ \frac{21}{2}\right]$

e) $(3-x) : x = 15 : 20;$ $\qquad 10 : 2 = (8+x) : x.$ $\qquad \left[\frac{12}{7};\ 2\right]$

f) $(2+x) : x = \frac{19}{3} : 2;$ $\qquad (6-x) : 10 = x : 2.$ $\qquad \left[\frac{12}{13};\ 1\right]$

g) $(5-x) : x = 8 : 2;$ $\qquad (8+x) : x = 7 : 3.$ $\qquad [1;\ 6]$