

UNITA' 4

Proporzioni e loro proprietà

- 1 Dati quattro numeri non nulli a, b, c, d si dice che essi formano una **proporzione** (o che sono in proporzione) se il rapporto tra i primi due è uguale al rapporto tra gli altri due. In tal caso si scrive:

$$a : b = c : d$$

e si legge « a sta a b come c sta a d ».

Per esempio i numeri 4, 12, 27, 81, presi in questo ordine, sono in proporzione; infatti sia il rapporto tra i primi due che il rapporto tra gli altri due è $1/3$. Scriviamo quindi:

$$4 : 12 = 27 : 81.$$

- a) Scrivere una proporzione diversa dalla precedente.
 b) Stabilire se le seguenti quaterne di numeri, presi nell'ordine scritto, sono in proporzione:

$$100, 10, 20, 2;$$

$$1, 12, 2, 24;$$

$$2, 8, 4, 32;$$

$$\frac{1}{2}, 2, 2, 8;$$

$$8, 16, 16, 32;$$

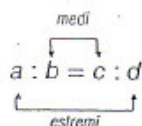
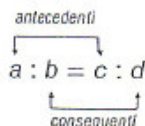
$$0,6, 1, 9, 15;$$

$$5, 10, 10, 50;$$

$$3, \frac{1}{3}, 1, 9;$$

$$5, \frac{1}{5}, 25, 1.$$

- 2 I quattro numeri a, b, c, d che costituiscono una proporzione, opportunamente raggruppati a due a due, assumono nomi particolari. Tali nomi sono riportati nei due schemi che seguono.



- a) Scrivere una proporzione i cui antecedenti siano 2 e 10.
 b) Scrivere una proporzione i cui medi siano $\frac{1}{2}$ e 4.
- 3 Una proporzione si dice **continua** se ha i medi (o gli estremi) tra loro uguali. Per esempio, la proporzione:

$$9 : 6 = 6 : 4$$

è continua (il numero 6 viene detto **medio proporzionale** tra 9 e 4).

- a) Scrivere una proporzione continua i cui medi siano entrambi uguali a 12.
 b) Scrivere la proporzione continua i cui estremi siano uguali a 4 e a 16.
- 4 Per le proporzioni valgono alcune proprietà che qui di seguito riportiamo.
- **Proprietà fondamentale.** In ogni proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.
 - **Proprietà dell'invertire.** Data una proporzione se ne ottiene un'altra scambiando tra loro ogni antecedente con il proprio conseguente.
 - **Proprietà del permutare.** Data una proporzione se ne ottiene un'altra scambiando tra loro o i medi o gli estremi.
 - **Proprietà del comporre e dello scomporre.** In ogni proporzione la somma (o la differenza) degli antecedenti sta alla somma (o alla differenza) dei conseguenti come ogni antecedente sta al proprio conseguente.

Per esempio, data la proporzione $16 : 24 = 6 : 9$, applicando ad essa tutte le proprietà, nell'ordine secondo il quale sono state enunciate, si ha:

$$\begin{array}{ll} 24 \cdot 6 = 16 \cdot 9 & \text{(vero);} & 24 : 16 = 9 : 6 & \text{(vero);} \\ 16 : 6 = 24 : 9 & \text{(vero);} & 9 : 24 = 6 : 16 & \text{(vero);} \\ (16 + 6) : (24 + 9) = 16 : 24 & \text{(vero);} & (16 - 6) : (24 - 9) = 16 : 24 & \text{(vero).} \end{array}$$

Applicare anche alle due proporzioni:

$$40 : 15 = 32 : 12 \quad \text{e} \quad 12 : 6 = 6 : 3$$

le suddette proprietà.

- 5 Le proprietà enunciate nel precedente esercizio permettono di ricavare il valore di termini incogniti che compaiono in una proporzione. In particolare, dalla proprietà fondamentale si traggono le seguenti regole:

- in una proporzione qualunque, un medio incognito è uguale al rapporto tra il prodotto degli estremi ed il medio noto; analogamente, un estremo incognito è uguale al rapporto tra il prodotto dei medi e l'estremo noto;
- in una proporzione continua, il medio proporzionale incognito è uguale alla radice quadrata del prodotto degli estremi.

Per esempio, date le tre proporzioni (nelle quali x rappresenti un termine incognito):

$$5 : x = 10 : 6; \quad x : 3 = \frac{1}{2} : \frac{3}{7}; \quad 18 : x = x : 8$$

applicando ad esse le dette regole si ottiene:

— per la prima $x = \frac{5 \cdot 6}{10} = 3;$

— per la seconda $x = \frac{3 \cdot 1/2}{3/7} = \frac{7}{2};$

— per la terza $x = \sqrt{18 \cdot 8} = \sqrt{144} = 12.$

Seguendo gli esempi, date le seguenti proporzioni determinare il valore di x :

a) $8 : 5 = 3 : x; \quad 9 : x = 27 : 2.$

$$\left[\frac{15}{8}; \frac{2}{3} \right]$$

b) $x : 3 = 6 : 9; \quad 25 : 3 = x : 9.$

$$[2; 75]$$

c) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{2}{5} : x; \quad \frac{4}{3} : x = \frac{5}{4} : 5.$

$$\left[\frac{4}{15}; \frac{16}{3} \right]$$

d) $27 : x = x : 363; \quad 0,25 : x = x : 0,36.$

$$[99; 0,]$$

e) $x : \left(2 - \frac{3}{2}\right) = \left(5 - \frac{1}{5}\right) : \frac{9}{2}.$

$$\left[\frac{8}{15} \right]$$

f) $x : \left(5 - \frac{7}{8}\right) = \left(9 + \frac{4}{3}\right) : \left(8 + \frac{2}{8}\right).$

$$\left[\frac{31}{6} \right]$$

g) $\frac{2 - \frac{3}{2}}{\frac{5}{4}} : \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3} + 0,5} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{6}}{2 - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3}} : x.$

$$\left[\frac{12}{15} \right]$$

h) $\left[2\left(1 + \frac{1}{3}\right)\right] : x = x : \left(1 - \frac{5}{2^5}\right).$

$$\left[\frac{2}{2} \right]$$

- 6 Date le seguenti proporzioni continue, determinare il valore del medio proporzionale x :

a) per difetto a meno di 0,1:

$$\left[\left(\frac{3}{2} + \frac{21}{10}\right) : \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\right)\right] : x = x : \left[\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 : \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] \cdot 3\right].$$

$$[7.]$$

b) per eccesso a meno di 0,01:

$$\left[\left(2 + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(2 - \frac{1}{2} \right) \right] : x = x : \left[\left(4 - \frac{3}{2} \right) \cdot \left(4 + \frac{3}{2} \right) \right] \quad [7,19]$$

c) arrotondato a meno di 0,1:

$$\left(\frac{55}{6} + \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{8} \right)^2 : x = x : \left(\frac{7}{8} - \frac{3}{4} : 6 \right) \quad [8,7]$$

7 Trovare:

a) il **quarto proporzionale** dopo le seguenti terne di numeri:

$$3, 15, 18; \quad 2, \frac{1}{2}, 16; \quad 3, 1, 27; \quad [90; 4; 9]$$

b) il **medio proporzionale** tra le seguenti coppie di numeri:

$$8 \text{ e } 2; \quad 5 \text{ e } 125; \quad 4 \text{ e } 9; \quad 144 \text{ e } \frac{9}{4}; \quad \frac{4}{9} \text{ e } \frac{121}{4}; \quad \frac{1}{49} \text{ e } 9. \quad \left[4; 25; 6; 18; \frac{11}{3}; \frac{3}{7} \right]$$

8 L'applicazione successiva di due o più delle proprietà enunciate nell'esercizio N. 4, permette di determinare il valore incognito x che appare nei seguenti tipi di proporzioni:

$$(3 + x) : 8 = x : 2; \quad (8 - x) : 9 = x : 5; \quad (2 - x) : x = 5 : 3.$$

Dalla prima, applicando la legge dello scomporre, si ottiene:

$$(3 + x - x) : (8 - 2) = x : 2, \quad 3 : 6 = x : 2 \quad \text{e quindi} \quad x = \frac{3 \cdot 2}{6} = 1.$$

Dalla seconda, applicando la legge del comporre, si ottiene:

$$(8 - x + x) : (9 + 5) = x : 5, \quad 8 : 14 = x : 5 \quad \text{e quindi} \quad x = \frac{8 \cdot 5}{14} = \frac{20}{7}.$$

Infine, dalla terza, applicando dapprima la proprietà del permutare i medi e poi la legge del comporre, si ottiene:

$$(2 - x) : 5 = x : 3, \quad (2 - x + x) : (5 + 3) = x : 3, \quad x = \frac{2 \cdot 3}{8} = \frac{3}{4}.$$

Seguendo gli esempi, trovare il valore della x che compare nelle proporzioni qui riportate:

$$a) (x + 4) : x = 8 : 3; \quad (x + 2) : x = 5 : 4. \quad \left[\frac{12}{5}; 8 \right]$$

$$b) \left(x + \frac{1}{2} \right) : 3 = x : 2; \quad \left(x + \frac{2}{5} \right) : \frac{1}{2} = x : \left(1 - \frac{2}{3} \right). \quad \left[1; \frac{4}{5} \right]$$

$$c) (5 - x) : x = 7 : 2; \quad \left(\frac{1}{2} - x \right) : x = \frac{4}{5} : \frac{2}{5}. \quad \left[\frac{10}{9}; \frac{1}{5} \right]$$

$$d) \left(\frac{5}{2} - x \right) : 3 = x : \left(1 - \frac{1}{2} \right); \quad x : 3 = (x - 7) : 1. \quad \left[\frac{5}{14}; \frac{21}{2} \right]$$

$$e) (3 - x) : x = 15 : 20; \quad 10 : 2 = (8 + x) : x. \quad \left[\frac{12}{7}; 2 \right]$$

$$f) (2 + x) : x = \frac{19}{3} : 2; \quad (6 - x) : 10 = x : 2. \quad \left[\frac{12}{13}; 1 \right]$$

$$g) (5 - x) : x = 8 : 2; \quad (8 + x) : x = 7 : 3. \quad [1; 6]$$